

## INFLUENCE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR LA CONVECTION FORCEE AU-DESSUS D'UNE SURFACE PLANE VERTICALE SOUMISE A UN FLUX DE RAYONNEMENT

GUO TINGWEI\*, RACHMAT BACHRUN† et MICHEL DAGUENET

Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Université de Perpignan, Avenue de Villeneuve,  
 66025 Perpignan Cedex, France

(Reçu le 15 juillet 1981 et sous forme révisée le 10 novembre 1981)

### NOTATIONS

|              |                                                                                              |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$ ,        | diffusivité thermique;                                                                       |
| $C_f$ ,      | $= 2\tau_0/\rho U_\infty^2$ , coefficient de frottement;                                     |
| $f$ ,        | fonction de $\xi$ et de $\eta$ ;                                                             |
| $f', f''$ ,  | dérivées de $f$ par rapport à $\eta$ ;                                                       |
| $g$ ,        | accélération de la pesanteur;                                                                |
| $Gr$ ,       | $= g\beta q x^4/k\nu^2$ , nombre de Grashof;                                                 |
| $k$ ,        | coefficient de conductibilité thermique;                                                     |
| $Nu$ ,       | $= qx/k(T_0 - T_\infty)$ , nombre de Nusselt;                                                |
| $Pr$ ,       | $= \nu/a$ , nombre de Prandtl;                                                               |
| $q$ ,        | densité du flux de rayonnement convertie en chaleur sur la paroi et récupérée par le fluide; |
| $Re$ ,       | $= U_\infty x/\nu$ , nombre de Reynolds;                                                     |
| $T$ ,        | température;                                                                                 |
| $T_0$ ,      | température de la paroi;                                                                     |
| $T_\infty$ , | température au sein du fluide;                                                               |
| $u$ ,        | composante de la vitesse suivant la coordonnée $x$ ;                                         |
| $U_\infty$ , | vitesse du fluide loin de la paroi;                                                          |
| $v$ ,        | composante de la vitesse suivant la coordonnée $y$ ;                                         |
| $x$ ,        | coordonnée verticale;                                                                        |
| $y$ ,        | coordonnée normale.                                                                          |

### Symboles grècs

|                                        |                                                                  |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $\beta$ ,                              | coefficient d'expansion volumique du fluide;                     |
| $\varepsilon = +1, \varepsilon = -1$ , | si l'écoulement est dirigé vers le bas et dans le cas contraire; |
| $\theta$ ,                             | fonction de $\xi$ et de $\eta$ ;                                 |
| $\theta, \theta'$ ,                    | dérivée de $\theta$ par rapport à $\eta$ ;                       |
| $\mu$ ,                                | viscosité dynamique;                                             |
| $\nu$ ,                                | viscosité cinématique;                                           |
| $\xi, \eta$ ,                          | variables adimensionnelles;                                      |
| $\rho$ ,                               | masse volumique;                                                 |
| $\tau_0$ ,                             | contrainte de cisaillement à la paroi;                           |
| $\psi$ ,                               | fonction de courant.                                             |

### 1. INTRODUCTION

ON TROUVE dans la littérature différents travaux concernant l'influence de la convection naturelle sur la convection forcée au-dessus d'une surface plane verticale dont la température est imposée [1-6] mais, à notre connaissance, rien si la surface est soumise à un flux de rayonnement. Seul le cas où la surface est horizontale paraît avoir été étudié [7]. Pourtant ce problème est important, notamment en énergétique solaire.

Considérons un plan vertical semi-infini dont une face est frappée par un rayonnement thermique tandis que l'autre est léchée par un fluide en écoulement, parallèlement à sa surface. L'échauffement du plan par le rayonnement, donne naissance à une convection naturelle dans le fluide qui perturbe l'écoulement forcé.

Nous nous proposons de calculer en régime laminaire permanent, les distributions des vitesses et de la température, dans la couche limite qui se développe sur le plan à partir de son bord d'attaque par le fluide.

Nous supposons constantes la densité  $\rho$  du flux d'énergie converti en chaleur sur le plan et récupérée par le fluide, la température  $T_\infty$  et la vitesse  $U_\infty$  du fluide loin de la paroi, les propriétés physiques du fluide autres que sa masse volumique.

### 2. FORMULATION DU PROBLEME

Soient  $x$  la coordonnée verticale, mesurée positivement dans la direction de l'écoulement forcé à partir du bord d'attaque et  $y$  la distance normale au plan mesurée positivement vers le sein du fluide.

Il faut résoudre le système différentiel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon g \beta (T - T_\infty) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

avec les conditions aux limites:

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad q = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4)$$

$$y = \infty, \quad u = U_\infty, \quad T = T_\infty; \quad (5)$$

$\varepsilon = +1$  lorsque l'écoulement est dirigé dans le même sens que la pesanteur (vers le bas) et  $\varepsilon = -1$  dans le cas contraire.

Introduisons la fonction de courant  $\psi$  définie par

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

et les changements de variables classiques:

$$\xi = \frac{Gr}{Re^{5/2}} \quad (8)$$

$$Gr = \frac{g\beta q x^4}{k\nu^2} \quad (9)$$

$$Re = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (10)$$

$$\eta = y(U_\infty/\nu x)^{1/2} \quad (11)$$

$$f(\xi, \eta) = \frac{\psi(x, y)}{(\nu U_\infty x)^{1/2}} \quad (12)$$

$$\theta(\xi, \eta) = (T - T_\infty)(U_\infty x/\nu)^{1/2}/(qx/k). \quad (13)$$

A l'aide de (8)-(13) le système (1)-(5) est transformé dans le système suivant d'équations:

\*Institut de production d'électricité de l'Académie des Sciences de Chine, Pekin, Chine.

†Institut de Technologie de Bandung, Bandung, Java, Indonésie.

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = \frac{3}{2}\xi \left( f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) - \theta \xi \quad (14)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + \frac{1}{2}(f\theta' - f'\theta) = \frac{3}{2}\xi \left( f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (15)$$

avec les conditions aux limites:

$$f(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, 0) = 0, \quad \theta'(\xi, 0) = -1 \quad (16)$$

$$f'(\xi, \infty) = 1, \quad \theta(\xi, \infty) = 0. \quad (17)$$

Supposons  $\xi \ll 1$  et développons les fonctions  $f(\xi, \eta)$  et  $\theta(\xi, \eta)$  en séries de puissances de  $\xi$ :

$$f(\xi, \eta) = f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \dots \quad (18)$$

$$\theta(\xi, \eta) = \theta_0(\eta) + \xi \theta_1(\eta) + \xi^2 \theta_2(\eta) + \dots \quad (19)$$

En portant ces expressions dans le système (14)–(17), on obtient une suite récurrente de systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 0, 1, 2, ... Il vient par exemple:

—Pour l'ordre zero:

$$f_0''' + \frac{1}{2}f_0 f_0'' = 0 \quad (20)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_0'' + \frac{1}{2}(f_0 \theta_0' - f_0' \theta_0) = 0 \quad (21)$$

avec les conditions aux limites:

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = 0, \quad \theta_0'(0) = -1 \quad (22)$$

$$f_0'(\infty) = 1, \quad \theta_0(\infty) = 0. \quad (23)$$

—Pour l'ordre 1:

$$f_1''' + 2f_1 f_0'' + \frac{1}{2}f_0 f_1'' - \frac{3}{2}f_1' f_0' + \theta_0 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{1}{Pr} \theta_1'' + 2f_1 \theta_0' - 2\theta_1 f_0' - \frac{1}{2}f_1' \theta_0 + \frac{1}{2}\theta_1' f_0 = 0 \quad (25)$$

avec les conditions aux limites:

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 0, \quad \theta_1'(0) = 0 \quad (26)$$

$$f_1'(\infty) = 0, \quad \theta_1(\infty) = 0. \quad (27)$$

—Pour l'ordre 2:

$$f_2''' + \frac{7}{2}f_2 f_0'' + 2f_1 f_1'' + \frac{1}{2}f_0 f_2'' - \frac{3}{2}f_2' f_1' - 3f_2' f_0' + \theta_1 = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \theta_2'' + \frac{7}{2}f_2 \theta_0' + 2\theta_1 f_1' + \frac{1}{2}f_0 \theta_2' \\ - 2\theta_1 f_1' - \frac{7}{2}f_0' \theta_2 - \frac{1}{2}f_2' \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

avec les conditions aux limites:

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0, \quad \theta_2'(0) = 0 \quad (30)$$

$$f_2'(\infty) = 0, \quad \theta_2(\infty) = 0. \quad (31)$$

L'intégration numérique de ces systèmes permet de calculer les distributions de la vitesse et de la température.

### 3. INTEGRATIONS NUMERIQUES ET RESULTATS

Nous utilisons la méthode de Runge-Kutta du 4ème ordre modifiée par [8]. Pour effectuer les intégrations, on dispose à chaque fois de trois conditions sur la paroi et de deux conditions à l'infini. Or, il faut aussi connaître les valeurs à la paroi des dérivées des vitesses et de la température. Pour cela, nous utilisons la méthode de [9]. Cette connaissance est impérative pour le premier terme de notre suite récurrente de systèmes différentiels tandis que pour les autres termes, qui sont linéaires, on peut démarrer les calculs en prenant n'importe quelle valeur initiale.

Les Tableaux 1–2 rassemblent pour différentes valeurs du nombre de Prandtl, d'une part les valeurs de  $f_0''(0)$  et  $\theta_1(0)$  (Tableau 1) d'autre part les variations de  $f_1'$  et  $\theta_1$  en fonction de  $\eta$  (Tableau 2).

La distribution de la vitesse en fonction de  $f(\eta)$  s'écrit:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{d(f(\eta))}{d\eta}$$

soit

$$\frac{u}{U_\infty} = f_0'(\eta) + f_1'(\eta) \frac{Gr}{Re^{5/2}} + f_2'(\eta) \left[ \frac{Gr}{Re^{5/2}} \right]^2 + \dots \quad (32)$$

La distribution de la température en fonction de  $\theta(\eta)$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} &= \frac{\theta(\xi, \eta)}{\theta(\xi, 0)} \\ &= \frac{\theta_0(\eta) + \theta_1(\eta) \frac{Gr}{Re^{5/2}} + \theta_2(\eta) \left[ \frac{Gr}{Re^{5/2}} \right]^2 + \dots}{\theta_0(0) + \theta_1(0) \frac{Gr}{Re^{5/2}} + \theta_2(0) \left[ \frac{Gr}{Re^{5/2}} \right]^2 + \dots} \end{aligned} \quad (33)$$

Compte tenu de la loi de Fourier selon laquelle  $q = -k(\partial T / \partial y)_{y=0}$  et des définitions de la contrainte de cisaillement à la paroi, du nombre de Nusselt local:

$$Nu = \frac{qx}{(T_0 - T_\infty)k},$$

du coefficient de frottement local

$$C_f = \frac{2\tau_0}{\rho U_\infty^2},$$

on déduit de (32)–(33) les expressions:

$$\begin{aligned} Nu Re^{-1/2} &= \frac{1}{\theta(\xi, 0)} \\ &= \left[ \theta_0(0) + \theta_1(0) \frac{Gr}{Re^{5/2}} + \theta_2(0) \left( \frac{Gr}{Re^{5/2}} \right)^2 + \dots \right]^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} C_f Re^{1/2} &= 2f''(\xi, 0) \\ &= 2 \left[ f_0''(0) + f_1''(0) \frac{Gr}{Re^{5/2}} + f_2''(0) \left( \frac{Gr}{Re^{5/2}} \right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

A titre d'exemple les Figs. (1)–(2) montrent les variations de  $u/U_\infty$  et celles de  $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$  en fonction de  $\eta$  pour  $Pr = 0,7$  et différentes valeurs de  $\xi$ .

Tableau 1. Valeurs de  $f_0''(0)$ ,  $f_1''(0)$ ,  $f_2''(0)$ ,  $\theta_0(0)$ ,  $\theta_1(0)$ ,  $\theta_2(0)$  pour  $Pr = 10^{-2}$ ;  $10^{-1}$ ;  $0,7$ ;  $1$ ;  $10$ ;  $100$

| $Pr$      | $f_0''(0)$ | $\theta_0(0)$ | $f_1''(0)$ | $\theta_1(0)$ | $-f_2''(0)$ | $\theta_2(0)$ |
|-----------|------------|---------------|------------|---------------|-------------|---------------|
| $10^{-2}$ | 0.33206    | 8.74748       | 13.0633    | 17.9081       | 126.949     | 407.404       |
| $10^{-1}$ | 0.33206    | 4.93984       | 8.54192    | 11.5070       | 38.0465     | 147.422       |
| 0.7       | 0.33206    | 2.46371       | 2.48689    | 2.84295       | 6.24779     | 14.8624       |
| 1.0       | 0.33206    | 2.17879       | 2.05983    | 2.15080       | 4.35316     | 9.45458       |
| 10        | 0.33206    | 1.00212       | 0.55473    | 0.30196       | 0.33879     | 0.38178       |
| 100       | 0.33206    | 0.46469       | 0.13041    | 0.03432       | 0.01924     | 0.01045       |

Tableau 2. Variations de  $f_0(\eta), f_1'(\eta), f_2'(\eta), \theta_0(\eta), \theta_1(\eta), \theta_2(\eta)$  en fonction de  $\eta$  pour  $Pr = 10^{-2}; 10^{-1}; 0,7; 1,0; 10$

| $\eta$        | 0,5     | 1,0     | 1,5     | 2,0     | 2,5     | 3,0     | 3,5     | 4,0     | 4,5     | 5,0     | 5,5     | 6,0     | 6,5     | 7,0     | 7,5     | 8,0     | 8,5     | 9,0     | 9,5     | 10      |           |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| Pr            |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |         |           |
| $f_0$         | 0,01    | 5,4639  | 8,9244  | 10,621  | 10,839  | 9,9313  | 8,3318  | 6,4993  | 4,8105  | 3,4714  | 2,5129  | 1,8583  | 1,4032  | 1,0651  | 0,7923  | 0,57096 | 0,38405 | 0,23267 | 0,11734 | 0,03931 | 0,00000   |
| $f_1$         | 0,1     | 2,6767  | 4,2709  | 4,9566  | 4,9193  | 4,3629  | 3,5137  | 2,5953  | 1,7819  | 1,1613  | 0,73921 | 0,47304 | 0,30942 | 0,20624 | 0,13746 | 0,08931 | 0,05491 | 0,0365  | 0,01436 | 0,00451 | 0,00000   |
| $f_2$         | 0,7     | 0,95711 | 1,4306  | 1,5501  | 1,4310  | 1,11731 | 0,86283 | 0,59111 | 0,33547 | 0,17614 | 0,08220 | 0,03406 | 0,01253 | 0,00409 | 0,00119 | 0,00031 | 0,00007 | 0,00002 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_0$    | 1,0     | 0,77902 | 1,1432  | 1,2163  | 1,1035  | 0,89052 | 0,64582 | 0,42057 | 0,24495 | 0,12706 | 0,05853 | 0,02387 | 0,00863 | 0,00276 | 0,00078 | 0,00019 | 0,00004 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_1$    | 10      | 0,17270 | 0,21047 | 0,19466 | 0,16350 | 0,12845 | 0,09323 | 0,06147 | 0,03640 | 0,01915 | 0,00894 | 0,00369 | 0,00135 | 0,00043 | 0,00012 | 0,00003 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_2$    | 0,01    | 61,034  | 115,11  | 157,32  | 182,30  | 186,49  | 170,49  | 139,94  | 103,95  | 71,148  | 46,442  | 30,399  | 20,932  | 15,397  | 11,804  | 9,0450  | 6,6550  | 4,5117  | 2,6494  | 1,1720  | 0,22368   |
| $\theta_3$    | 0,1     | 18,046  | 32,734  | 43,132  | 48,301  | 47,846  | 42,402  | 33,740  | 24,233  | 15,916  | 9,8077  | 5,8989  | 3,6211  | 2,3318  | 1,5645  | 1,0380  | 0,69101 | 0,41419 | 0,20939 | 0,07111 | 0,00000   |
| $\theta_4$    | 1,0     | 2,7640  | 4,7669  | 5,9348  | 6,2425  | 5,7742  | 4,7449  | 3,4641  | 2,2404  | 1,2804  | 0,64578 | 0,28741 | 0,11301 | 0,03932 | 0,01214 | 0,00334 | 0,00082 | 0,00018 | 0,00004 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_5$    | 10      | 0,13168 | 0,19185 | 0,19926 | 0,17975 | 0,14921 | 0,11410 | 0,07922 | 0,04930 | 0,02728 | 0,01336 | 0,00577 | 0,00220 | 0,00074 | 0,00022 | 0,00006 | 0,00001 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_6$    | 0,01    | 8,2478  | 7,7498  | 7,2553  | 6,7656  | 6,2819  | 5,8054  | 5,3366  | 4,8760  | 4,3239  | 3,9803  | 3,5453  | 3,1187  | 2,7005  | 2,2907  | 1,8891  | 1,4956  | 1,1100  | 0,73235 | 0,36239 | 0,00000   |
| $\theta_7$    | 0,1     | 4,44    | 3,9528  | 3,4823  | 3,0370  | 2,6225  | 2,2426  | 1,8985  | 1,5912  | 1,3194  | 1,0815  | 0,87524 | 0,69792 | 0,54682 | 0,41916 | 0,31218 | 0,22320 | 0,14971 | 0,08939 | 0,04012 | 0,00000   |
| $\theta_8$    | 1,0     | 1,9694  | 1,5064  | 1,0989  | 0,79165 | 0,49966 | 0,30918 | 0,17988 | 0,09812 | 0,05005 | 0,02382 | 0,01055 | 0,00435 | 0,00166 | 0,00059 | 0,00019 | 0,00006 | 0,00002 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_9$    | 10      | 0,53236 | 0,20535 | 0,05155 | 0,00733 | 0,00051 | 0,00001 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_{10}$ | 0,01    | 17,899  | 17,843  | 17,706  | 17,466  | 17,116  | 16,654  | 16,084  | 15,412  | 14,643  | 13,780  | 12,825  | 11,778  | 10,639  | 9,4061  | 8,0797  | 6,6583  | 5,1410  | 3,5265  | 1,8134  | 0,00000   |
| $\theta_{11}$ | 0,1     | 11,484  | 11,382  | 11,140  | 10,737  | 10,178  | 9,4912  | 8,7112  | 7,8754  | 7,0164  | 6,1601  | 5,3257  | 4,5271  | 3,7738  | 3,0712  | 2,4216  | 1,8244  | 1,2765  | 0,77298 | 0,30732 | -0,127981 |
| $\theta_{12}$ | 1,0     | 2,8268  | 2,7249  | 2,4893  | 2,1247  | 1,6813  | 1,2289  | 0,82681 | 0,51536 | 0,29570 | 0,15654 | 0,07644 | 0,03442 | 0,01429 | 0,00546 | 0,00192 | 0,00062 | 0,00018 | 0,00005 | 0,00001 | 0,00000   |
| $\theta_{13}$ | 10      | 0,28561 | 0,19797 | 0,08167 | 0,01743 | 0,00169 | 0,00006 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $\theta_{14}$ | 0,01    | 407,29  | 406,52  | 404,50  | 400,71  | 394,80  | 386,53  | 375,81  | 362,65  | 347,08  | 329,10  | 308,78  | 285,98  | 260,62  | 232,60  | 201,78  | 168,01  | 131,14  | 90,973  | 47,328  | -0,010451 |
| $\theta_{15}$ | 0,1     | 142,26  | 141,25  | 138,78  | 134,54  | 128,49  | 120,82  | 111,91  | 102,20  | 92,092  | 81,927  | 71,944  | 62,307  | 51,114  | 44,413  | 36,209  | 28,463  | 21,100  | 14,006  | 7,0326  | 0,00000   |
| $\theta_{16}$ | 1,0     | 14,799  | 14,392  | 13,417  | 11,820  | 9,7406  | 7,4559  | 5,2787  | 3,4491  | 2,0778  | 1,1534  | 0,58979 | 0,27770 | 0,12034 | 0,04798 | 0,01759 | 0,00592 | 0,00183 | 0,00051 | 0,00011 | 0,00000   |
| $\theta_{17}$ | 10      | 0,367   | 0,28073 | 0,13770 | 0,03613 | 0,00432 | 0,00020 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000   |
| $f_0$         | 0,16589 | 0,32978 | 0,48679 | 0,62977 | 0,75126 | 0,84604 | 0,91304 | 0,95552 | 0,97951 | 0,99154 | 0,99688 | 0,99897 | 0,99970 | 0,99992 | 0,99998 | 0,99998 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000   |

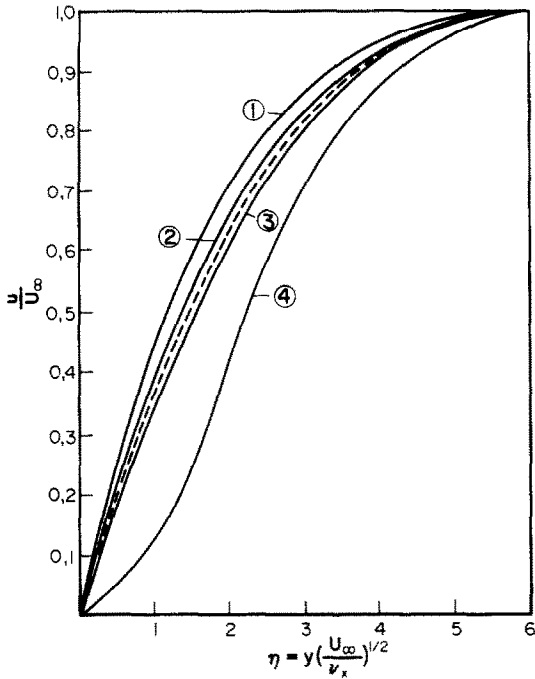


FIG. 1. Variations de  $u/U_\infty$  en fonction de  $\eta$  pour  $Pr = 0,7$  et différentes valeurs de  $\xi$ . ①  $\xi = 0,1$  et  $\varepsilon = +1$ ; ②  $\xi = 0,01$  et  $\varepsilon = +1$ ; ③  $\xi = 0,01$  et  $\varepsilon = -1$ ; ④  $\xi = 0,1$  et  $\varepsilon = -1$ . La courbe en trait discontinu correspond à  $\xi = 0$ .

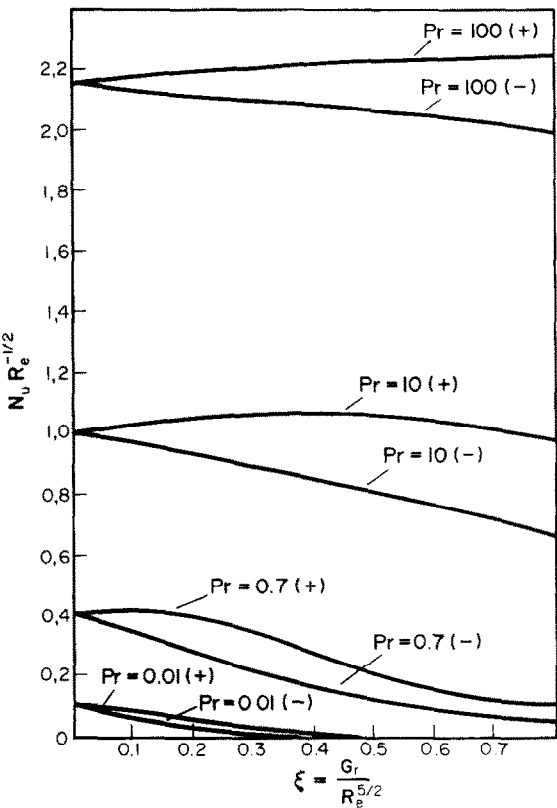


FIG. 3. Variations de  $Nu Re^{-1/2}$  en fonction de  $\xi$  pour  $Pr = 10^{-2}$ ;  $0,7$ ;  $10$ ;  $100$ . Le signe (+) indique que  $\varepsilon = +1$  et le signe (-) indique que  $\varepsilon = -1$ .

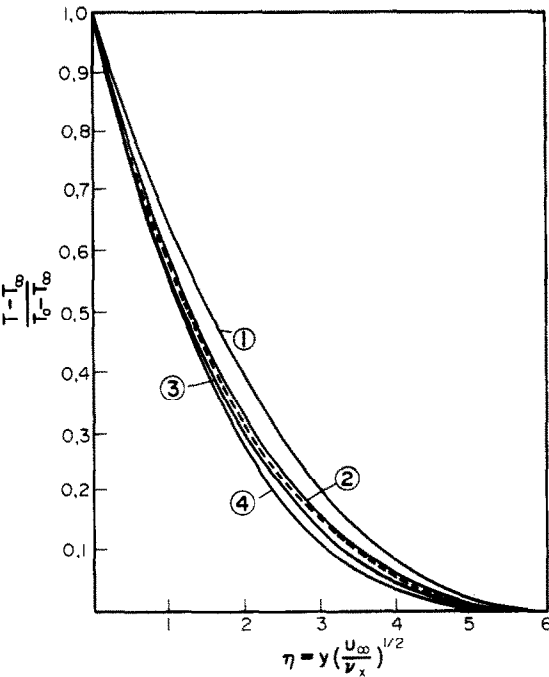


FIG. 2. Variations de  $(T - T_\infty)/(T_0 - T_\infty)$  en fonction de  $\eta$  pour  $Pr = 0,7$  et différentes valeurs de  $\xi$ . ①  $\xi = 0,1$  et  $\varepsilon = -1$ ; ②  $\xi = 0,01$  et  $\varepsilon = -1$ ; ③  $\xi = 0,01$  et  $\varepsilon = +1$ ; ④  $\xi = 0,1$  et  $\varepsilon = +1$ . La courbe en trait discontinu correspond à  $\xi = 0$ .

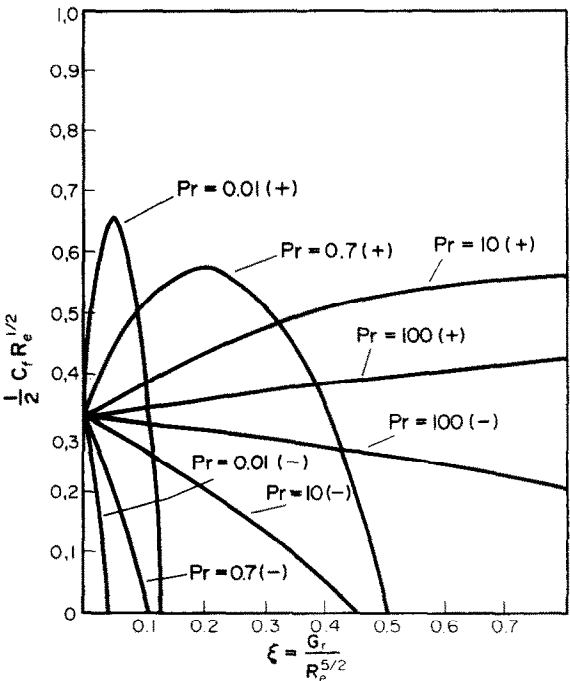


FIG. 4. Variations de  $\frac{1}{2} C_f Re^{1/2}$  en fonction de  $\xi$  pour  $Pr = 10^{-2}$ ;  $0,7$ ;  $10$ ;  $100$ . Le signe (+) indique que  $\varepsilon = +1$  et le signe (-) indique que  $\varepsilon = -1$ .

Les Figs. (3)–(4) représentent respectivement pour:  $Pr = 10^{-2}$ ; 0,7; 10;  $10^2$  les variations de  $Nu \cdot Re^{-1/2}$  et celles de  $\frac{1}{2}C_f \cdot Re^{1/2}$  en fonction de  $\xi$  déduites de (34)–(35) (approximation du 2nd ordre).

Insistons sur le fait que ces résultats ne sont valables que pour  $\xi \ll 1$ .

### BIBLIOGRAPHIE

1. E. M. Sparrow, R. Eichorn and J. C. Gregg, Combined forced and free convection in a boundary layer flow, *Phys. Fluids* 2, 319–328 (1959).
2. J. R. Kliegel, Laminar free and forced convective heat transfer from a vertical flat plate. Ph.D. thesis, University of California (1959).
3. J. H. Merkin, The effect of buoyancy forces on the boundary layer flow over a semi-finite vertical flat plate in a uniform free stream. *J. Fluid Mech.* 35, 439–450 (1969).
4. J. R. Lloyd and E. M. Sparrow, Combined forced and free convection flow on vertical surfaces. *Int. J. Heat Mass Transfer* 13, 434–438 (1970).
5. T. T. Kao, G. A. Domoto and H. G. Eirod, Jr., Free convection along a nonisothermal vertical flat plate. *Trans. ASME* 72–78 (1977).
6. A. A. Szewczyk, Combined forced and free-convection laminar flow. *J. Heat Transfer* 501–506 (1964).
7. A. Mucoglu and T. S. Chen, Mixed convection on a horizontal plate with uniform surface heat flux. *Proc. 6th Int. Heat Transfer Conf.*, Toronto, p. 85 (1978).
8. L. Lapidus and J. H. Seinfeld, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Academic Press, N.Y. (1971).
9. M. H. Rogers and C. N. Lance, Flow in the presence of a rotating disk. *J. Fluid Mech.* 7, 617–631 (1960).

*Int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 25, No. 7, pp. 1065–1069, 1982  
Printed in Great Britain

0017-9310/82/071065-05 \$03.00/0  
Pergamon Press Ltd.

## LAMINAR VISCO-ELASTIC FLOW AND HEAT TRANSFER BETWEEN TWO STATIONARY UNIFORMLY POROUS DISCS OF DIFFERENT PERMEABILITY

JYOTIRMOY SINHA ROY and NALIN KANTA CHAUDHURY

Post-Graduate Department of Mathematics, Utkal University, Vani Vihar,  
Bhubaneswar-751004, Orissa, India

(Received 1 February 1981 and in revised form 23 October 1981)

### NOMENCLATURE

|                                     |                                                               |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $2a$ ,                              | channel width;                                                |
| $E$ ,                               | Eckert number;                                                |
| $f(\eta), f'(\eta)$ ,               | functions defined in (4);                                     |
| $f_0(\eta), f_1(\eta), f_2(\eta)$ , | functions defined in (7);                                     |
| $p$ ,                               | pressure;                                                     |
| $P$ ,                               | Prandtl number;                                               |
| $q$ ,                               | Nusselt number;                                               |
| $r_0$ ,                             | the distance of a given point on either disc from the centre; |
| $r$ ,                               | dimensionless radial distance;                                |
| $r', \theta', z'$ ,                 | cylindrical polar coordinates;                                |
| $R$ ,                               | Reynolds number;                                              |
| $S$ ,                               | elastic parameter;                                            |
| $T_1, T_2$ ,                        | constant temperatures at the discs;                           |
| $u', v'$ ,                          | velocity components in $r', z'$ directions respectively;      |
| $u, v$ ,                            | dimensionless velocity components;                            |
| $V_1, V_2$ ,                        | constant velocities at the discs.                             |

### Greek symbols

|                                    |                               |
|------------------------------------|-------------------------------|
| $\eta$ ,                           | dimensionless axial distance; |
| $\theta$ ,                         | dimensionless temperature;    |
| $\theta_0(\eta), \theta_2(\eta)$ , | functions defined in (12);    |
| $\lambda$ ,                        | the ratio of $r$ by $r_0$ ;   |
| $\tau$ ,                           | dimensionless skin friction;  |
| $\phi$ ,                           | dissipation function.         |

### 1. INTRODUCTION

PROBLEMS of flow and heat transfer between two parallel porous or non-porous discs are of great importance in the design of thrust bearings, radial diffusers etc. Elkouh [1], Mishra *et al.* [2], Rasmussen [3] and Wang [4] studied a few problems between two rotating porous discs. All these authors confined their discussions to either constant suction or equal rates of suction and injection at the discs. Terril and Cornish [5] studied the problem of radial flow of a viscous, incompressible fluid between two stationary, uniformly porous discs of different permeability and obtained solutions for small as well as large suction and injection velocities. The purpose of this paper is to generalize Terril and Cornish's [5] problem to visco-elastic fluid and to study related heat transfer problem. Since the visco-elastic fluids are being used as lubricants this problem may be useful in the design of the externally pressurized thrust bearings. The visco-elastic fluid model considered is given by Walters [6].

### 2. MATHEMATICAL ANALYSIS

Consider the fluid in between two infinite porous discs  $z' = -a$  and  $z' = a$ . The fluid is injected or sucked normally with constant velocity  $V_1$  at  $z' = -a$  and  $V_2$  at  $z' = a$ . These velocities may have either sign but will be assumed positive in positive  $z'$ -direction. The discs are maintained at constant temperatures  $T_1$  and  $T_2$  respectively. The geometry of the problem is shown in the Fig. 1. We shall work through